

## پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۴ کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید  $y \geq 3$  است.

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9} \xrightarrow{x^2=2y} \sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$\xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6} \Rightarrow \text{محل تلاقی: } A(\sqrt{6}, 3)$$

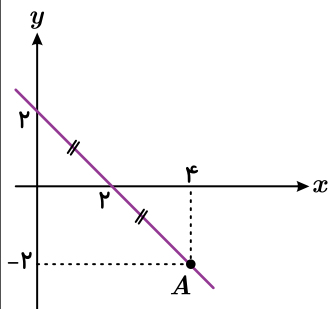
نکته: فاصله هر نقطه با فرم  $A(x, y)$  تا مبدأ مختصات برابر است با:  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

$$\xrightarrow{\text{فاصله}} d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

۲ گزینه ۱

توجه: اگر مختصات یک نقطه روی محور مختصات  $(a, b)$  باشد آنگاه فاصله آن نقطه تا مبدأ برابر است با:  $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

معادله خط داده شده  $y = 2 - x$  است؛ زیرا شیب آن برابر  $\tan 135^\circ = -1$  است. حال طبق شکل مقابل مختصات نقطه A به صورت  $A(4, -2)$  است و فاصله آن از مبدأ مختصات برابر  $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$  است.



۳ گزینه ۲ فرض کنید A و B روی خط  $x = \alpha$  قرار دارند که موازی محور y است.

$$A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 - 2\alpha - 3 \end{matrix} \right. \quad B \left| \begin{matrix} \alpha \\ \alpha^2 + \alpha + 1 \end{matrix} \right.$$

$$\overline{AB} = \alpha^2 + 2\alpha + 4 = (\alpha + 1)^2 + 3 \Rightarrow \min(\overline{AB}) = 3$$

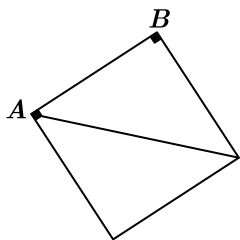
۴ گزینه ۱

$$A(-\frac{1}{2}, a) \quad B(-\frac{1}{3}, b)$$

$$m_{AB} = \frac{b-a}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 6(b-a) = \sqrt{3} \Rightarrow b-a = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$AB = \sqrt{(\frac{1}{6})^2 + (b-a)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{طول قطر} = \sqrt{2} \times AB = \frac{\sqrt{2}}{3}$$



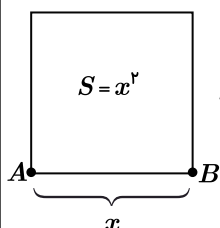
۵ گزینه ۳ معادله مختص به طول پاره خط  $MN$  از اختلاف معادله دو منحنی حاصل می شود:

$$|MN| = x^3 + 2x - 3 - x^3 + 2x^2 - 1 = 2x^2 + 2x - 4$$

$$\text{نقطهٔ ماکزیم } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow |MN|_{\max} = 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-1}{2}\right) - 4 = -4.5$$

۶ گزینه ۳



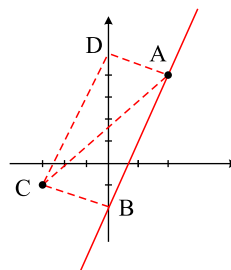
$$m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{m - k}{6} = \frac{-1}{2} \Rightarrow m - k = -3$$

$$x = |AB| \Rightarrow x = \sqrt{(m - k)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36} \Rightarrow x^2 = 45 \Rightarrow S = 45$$

۷ گزینه ۲

۸ گزینه ۳ ابتدا معادله خط گذرنده از  $A$  را می یابیم:  $A(2, 4)$  و  $m = 3$ .

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$



حال فاصله نقطه  $C$  از خط فوق که  $A$  و  $B$  روی آن قرار دارند محاسبه می کنیم.

این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| = \frac{|y - 3x + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|-1 - 3(-3) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

قطر مستطیل  $AC$  است آن را نیز محاسبه می کنیم:

$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{50}$$

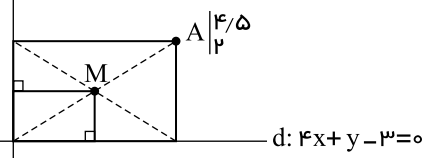
$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50 = AB^2 + 10 \Rightarrow |AB| = \sqrt{40}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} : 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

۹ گزینه ۱ مختصات نقطه  $(4.5, 2)$  در هیچ یک از معادلات داده شده، صدق نمی کند و شکل به صورت روبه روست:

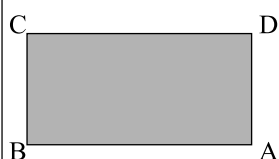
d:  $x - 4y - 5 = 0$



مطابق شکل فاصله  $M$  (وسط قطر) از اضلاع برابر نصف طول و عرض مستطیل است. لذا طول و عرض مستطیل را به دست می آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|4 \cdot 5 - 1 - 5|}{\sqrt{1 + (-4)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \text{فاصله } M \text{ از اضلاع} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{17}}{4} : \min \\ \frac{\sqrt{17}}{2} : \max \end{array} \right. \\ \frac{|1 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{array} \right.$$

۱۰. گزینه ۳



$$\text{شیب خط } AB = \frac{4 - 1}{-1 - 3} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{شیب خط } CD = \frac{y + 3 - y}{-1 - x - x} = \frac{3}{-1 - 2x} = -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

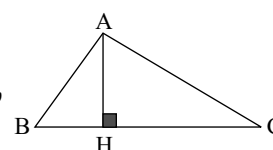
$$\text{شیب خط } BC = \frac{y - 1}{x - 3} = \frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{AB \perp BC} \frac{y - 1}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -1$$

$$\text{طول } AB = \sqrt{(3 + 1)^2 + (4 - 1)^2} = 5 \quad \text{طول } BC = \sqrt{(1 + 1)^2 + (3 - \frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{محیط } ABCD = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

۱۱

گزینه ۴ شکل فرضی را در نظر می گیریم. ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه  $B$  و  $C$  می گذرد می نویسیم و سپس فاصله نقطه



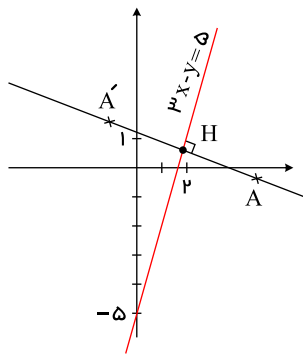
$A$  از خط را به دست می آوریم.

$$BC : \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 + 2}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A | 5 \\ x - y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه  $A \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$  از خط به معادله  $ax + by + c = 0$  از رابطه  $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  به دست می آید.

۱۲ گزینه ۲



محیط مثلث مدنظر  $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$  است پس طول هر ضلع آن  $\sqrt{30}$  خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}; \text{ متساوی الاضلاع ارتفاع } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ضلع است یعنی:}$$

پس باید فاصله  $A$  تا  $H$  برابر با  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  باشد. دقت کنید  $A$  روی خط عمود بر  $xy = 5$  است.

$$\Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{عكس و قرینه}} m' = -\frac{1}{3}$$

معادله خط گذرنده از  $A$  و  $H$  را می‌یابیم مختصات  $H(2, 1)$  و  $m' = -\frac{1}{3}$  را داریم.

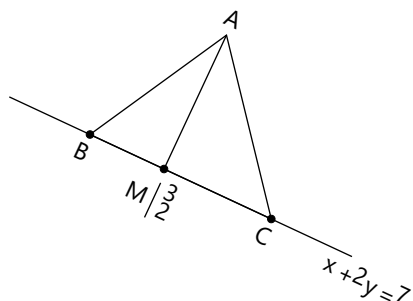
$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + x = 5$$

پس  $A$  روی خط  $5 = x + 3y$  است که می‌توان مختصات  $A$  را به صورت پارامتری  $(\alpha, \frac{5-\alpha}{3})$  در نظر گرفت  $AH$  را برابر با  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha - r)^r + \underbrace{\left(\frac{\delta - \alpha}{r} - 1\right)^r}_{\left(\frac{r - \alpha}{r}\right)} = \frac{q_0}{r} \Rightarrow (\alpha - r)^r \left(1 + \frac{1}{q}\right) = \frac{q_0}{r}$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{2} \Rightarrow A(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}) \\ \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{در گزینه ها نیست.} \end{cases}$$

۱۳ گزینه ۲



چون فاصله نقطه  $A$  از دو رأس  $B$  و  $C$  با هم برابر است بنابراین نقطه  $A$  روی عمود منصف پاره خط  $BC$  قرار دارد.

$$x + ٢y = ٧ \rightarrow m_{خط} = -\frac{1}{٢} \rightarrow m_{عمودمنصف} = ٢$$

بنابر این معادلهٔ عمود منصف  $y - ۲ = ۲(x - ۳) \rightarrow y = ۲x - ۴$  است. نقطهٔ  $A$  را روی آن در نظر می‌گیریم که فاصله‌اش از نقطهٔ  $\alpha_{۲-۴}$

۳  
۲  $M$  باید برابر  $5\sqrt{5}$  باشد.

$$AM = 5\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 4 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 6)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 4(\alpha - 3)^2}$$

$$= \sqrt{5(\alpha - 3)^2} = \sqrt{5}|\alpha - 3| = 5\sqrt{5} \rightarrow |\alpha - 3| = 5 \rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 5 \rightarrow \alpha = 8 \\ \alpha - 3 = -5 \rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

۱۴ گزینه ۱

$$x + y = a \Rightarrow y = a - x$$

نقطه  $A$  روی خط  $y = a - x$  به صورت  $A(k, a - k)$  است. حال طبق فرض سؤال داریم:

$$B(-3, 2) \Rightarrow AB = \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(k + 3)^2 + (a - k - 2)^2} = \sqrt{29} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k + 3)^2 + (a - k - 2)^2 = 29 \quad (1)$$

$$C(-1, 4) \Rightarrow AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(k + 1)^2 + (a - k - 4)^2} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k + 1)^2 + (a - k - 4)^2 = 25 \quad (2)$$

طرفین روابط ۱ و ۲ را از هم کم می‌کنیم.

$$k^2 + 6k + 9 + (a - k - 2)^2 - (k^2 + 2k + 1 + (a - k - 4)^2) = 29 - 25$$

$$\Rightarrow k^2 + 6k + 9 + (a - k - 2)^2 - k^2 - 2k - 1 - (a - k - 4)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 4k + 8 + (a - k - 2)^2 - (a - k - 4)^2 = 4 \Rightarrow 4k + 8 + (a - k - 2 - a + k + 4)(a - k - 2 + a - k - 4) = 4$$

$$\Rightarrow 4k + 8 + 2(2a - 2k - 6) = 4 \Rightarrow 4k + 8 + 4a - 4k - 12 = 4 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

طبق شکل داریم گزینه ۲

$$m_{OA} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_l = -\frac{3}{4}$$

$$\text{معادله خط } l: y + 4 = -\frac{3}{4}(x + 3)$$

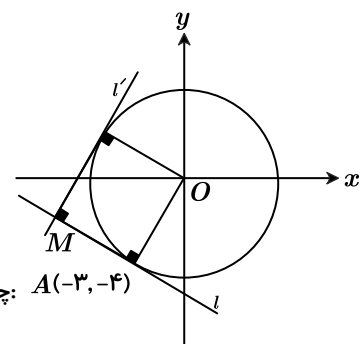
$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$$

$$\text{معادله } l': y = \frac{4}{3}x + k$$

توجه شود که شعاع دایره  $OA = \sqrt{9 + 16} = 5$  است؛ پس فاصله  $O$  تا خط  $l'$  نیز برابر ۵ است و داریم:

$$Ol' = \frac{|0 - 0 + k|}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = \frac{|k|}{\frac{5}{3}} = \frac{3|k|}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3|k|}{5} = 5 \Rightarrow |k| = \frac{25}{3} \xrightarrow{k > 0} k = \frac{25}{3} \Rightarrow \begin{cases} l: 3x + 4y = -25 \\ l': -4x + 3y = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 7y \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow xy = 7$$



چون خط  $l'$  بر خط  $l$  عمود است؛ پس خواهیم داشت:

۱۶ گزینه ۲ با توجه به فرض، باید دو خط داده شده با هم موازی باشند:

$$\begin{cases} d_1: y - ax = 1 \Rightarrow m_1 = a \\ d_2: ay - x = a - 1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{a} \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} m_1 = m_2 \Rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

نقطه  $(1, 2)$  یک رأس مستطیل است، پس روی یکی از خطوط  $d_1$  و  $d_2$  قرار دارد:

$$a = 1 : \begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \xrightarrow{\text{شامل (1,2)}} 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$a = -1 : \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow (\text{غ قق})$$

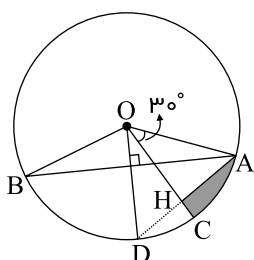
اندازهٔ یک ضلع مستطیل، برابر با فاصلهٔ دو خط  $y = x$  و  $y = x + 1$  است:

$$h = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

قطر مستطیل برابر ۵ است، لذا اندازه ضلع دیگر مستطیل را از قضیه فیثاغورس به دست می آوریم:

$$k^r + h^r = 5^r \Rightarrow k = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = k \cdot h = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3,5$$

۱۷ گزینه ۱



$$S = \pi \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |OA| = 1 \Rightarrow |AH| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}$$

$$(OH)^r + (AH)^r = (OA)^r \Rightarrow |OH|^r = 1 - \frac{1}{r} = \frac{r}{r} \Rightarrow |OH| = \frac{\sqrt{r}}{r}$$

$$AC \text{ طول کمان} = R\alpha = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad |HC| = |OC| - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{اختلاف محیطها} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

۱۸ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$1\mathfrak{d}x^{\mathfrak{r}} + 7\mathfrak{r}x + 1\mathfrak{f} < \circ \Rightarrow \underbrace{(\mathfrak{d}x + 1)}_{x = -\frac{1}{\mathfrak{d}}} \underbrace{(\mathfrak{r}x + 1\mathfrak{f})}_{x = -\frac{1\mathfrak{f}}{\mathfrak{r}}} < \circ \Rightarrow \frac{-1\mathfrak{f}}{\mathfrak{r}} < x < \frac{-1}{\mathfrak{d}} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} - 1 > 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} > 4 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 < -3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} < -2 \Rightarrow x < -3 \end{array} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I),(II)}} -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow \max(b-a) = -3 - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

19

$$y = ۲x^۲ - (m + ۲)x + m \Leftarrow \text{مجموع ضرایب معادلهٔ روبه‌رو صفر است.} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = ۱ \\ x_۲ = \frac{m}{۲} \end{cases} \text{گزینه ۴}$$

$$x = \circ \Rightarrow y = m \quad S = \frac{1}{2} |m(\frac{m}{2} - 1)| = \frac{3}{2} \Rightarrow |m(\frac{m}{2} - 1)| = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |m(m - ۲)| = ۳ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۳ \end{cases} \quad \text{رأس سهمی } y = x^۲ - mx + ۱ \quad \begin{cases} \frac{m}{۲} = -\frac{۱}{۲} \\ \frac{m}{۲} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۲۰. گزینه ۱ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های حقیقی معادله درجه دوم داده شده باشند طبق فرض داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^{\mathfrak{r}} = -bc \rightarrow a^{\mathfrak{r}} + bc = \circ \rightarrow \mathfrak{q} + (\mathfrak{r}m - 1)(\mathfrak{r} - m) = \circ$$

$$\rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0 \rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0 \rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0 \rightarrow \text{قابل قبول}$$

۲۱ گزینه ۴ برای این منظور باید  $\Delta > 0, S > 0, P > 0$  باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 8(m + 6) > 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 > 0 \rightarrow (m - 12)(m + 4) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -4 \vee m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک  $I, II, III$  به جواب  $-6 < m < -4$  می‌رسیم.

۲۲ گزینه ۱ معادله به صورت  $x^2 + x = 5$  است که در آن  $S = x_1 + x_2 = -1$  و  $P = x_1 x_2$  است. از طرفی  $x(x+1) = 5$  است.

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1+1} = \frac{x_1}{5}, \frac{1}{x_2+1} = \frac{x_2}{5}$$

پس معادله‌ای پیدا می‌کنیم که ریشه‌های  $\frac{x_1^3}{125}$  و  $\frac{x_2^3}{125}$  باشد:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{125}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{1}{125}(S^3 - 3SP) = \frac{-16}{125} \\ P' = \frac{1}{5^6}(x_1 x_2)^3 = \frac{1}{5^6}P^3 = -\frac{1}{125} \end{cases}$$

پس معادله مورد نظر به صورت  $x^2 + \frac{16}{125}x - 1 = 0$  است:

$$\Rightarrow 125x^2 + 16x = 1$$

۲۳ گزینه ۳

$$S = P + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow c - b = 2a$$

دقت کنید صورت سؤال  $ax^2 + bx - c = 0$  داده شده است و با فرض مثبت بودن  $c$  معادله همواره جواب دارد ( $\Delta > 0$ ) در ضمن  $P = \frac{-c}{a}$  می‌شود.

$$\text{حالت ۷} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, 4, \dots, 9 \\ b = 1, 2, \dots, 7 \end{cases} \Rightarrow \text{باید } c \text{ باید ۲ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \text{if } a = 1$$

$$\text{حالت ۵} \Rightarrow \begin{cases} c = 5, 6, 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \Rightarrow \text{باید } c \text{ باید ۴ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \text{if } a = 2$$

$$\text{حالت ۳} \Rightarrow \begin{cases} c = 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3 \end{cases} \Rightarrow \text{باید } c \text{ باید ۶ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \text{if } a = 3$$

۱ حالت  $\Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow c$  باید ۸ واحد بزرگتر از  $b$  باشد.  $\Rightarrow \Rightarrow a = 4$  if

در مجموع ۱۶ حالت یا ۱۶ معادله خواهیم داشت.

۲۴ گزینه ۴

برای حل معادله دو مجذوری از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \sqrt{69} \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{t=x^2 > 0} x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

چون دو ریشه قرینه یکدیگرند پس جمع آنها صفر است و برای حاصلضرب داریم:

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ p = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \end{cases} \Rightarrow p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} = \frac{59 + 7\sqrt{69}}{2} \Rightarrow 2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

توجه: چون  $S = 0$  است بنابراین  $2P^2 - 3(0)P + 2(0) = 2P^2$

۲۵

گزینه ۳ چون  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامت هستند حتماً  $\Delta > 0$  است. مجموع ریشه‌ها برابر  $-\frac{b}{a}$  و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر  $-\frac{c}{a}$  است.

$$\text{فاصله} = \left| \frac{-c}{a} - \left( \frac{-b}{a} \right) \right| = \left| \frac{b-c}{a} \right| = 2 \rightarrow |b-c| = 2a$$

بنابراین  $b$  و  $c$  باید طوری انتخاب شوند که تفاضلشان زوج باشد یعنی یا هر دو باید زوج باشند (دو زوج از بین ۲، ۴، ۶، ۸) یا هر دو باید فرد باشند (دو فرد از بین

۱، ۳، ۵، ۷ و ۹)

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$$

چون  $c - b$  داخل قدرمطلق است پس  $b$  و  $c$  می‌توانند با هم جابه‌جا شوند یعنی ۳۲ حالت.

۲۶

گزینه ۲ چون  $a$  و  $b$  ریشه‌های معادله  $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$  هستند، داریم:

$$\text{ضرب ریشه‌ها: } a - b = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = a + b - 1 \quad (1)$$

$$\text{جمع ریشه‌ها: } a + b = \frac{-(a^2 + b^2 - 12)}{1} = a^2 + b^2 - 12$$

از اتحاد  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$  استفاده می‌کنیم:

$$a + b = (a + b)^2 - 2ab - 12 \xrightarrow{(1)} a + b = (a + b)^2 - 2(a + b - 1) - 12$$

با فرض  $a + b = t$  داریم:

$$t = t^2 - 2(t - 1) - 12 = t^2 - 2t + 2 - 12 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t - 5)(t + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

۲۷ گزینه ۴ با نوشتن شرط تشکیل دنباله هندسی داریم:

$$x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$$

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} a^2 = \alpha \cdot \beta = p \Rightarrow a^2 = \frac{2a-1}{1} = 2a-1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

توجه کنید که به ازای  $a = 1$  معادله حاصل دارای دو ریشه متمایز است.

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0$$

۲۸

گزینه ۴ در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  اختلاف ریشه‌های معادله برابر  $\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$  است.

$$\Rightarrow |x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{4k^2 - 20}}{1} = 2\sqrt{k^2 - 5}$$

که باید برابر  $\frac{4}{3}K$  قرار دهیم:

$$2\sqrt{k^2 - 5} = \frac{4}{3}k \Rightarrow \sqrt{k^2 - 5} = \frac{2k}{3} \Rightarrow k^2 - 5 = \frac{4k^2}{9} \Rightarrow k^2 = 9$$

$$\Rightarrow \left\lceil \frac{k^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 4$$

۲۹ گزینه ۳

$$A = \frac{4\alpha + \beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha}{5\beta^2} + \frac{\beta^5}{5\beta^2} = \frac{4\alpha^3}{5\beta^2\alpha^2} + \frac{\beta^3}{5}$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 5, P = \alpha\beta = 2 \Rightarrow$$

$$A = \frac{4\alpha^3}{5 \times 4} + \frac{\beta^3}{5} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{5} = \frac{S^3 - 3PS}{5} = \frac{125 - 3(5)(2)}{5} = 19$$

۳۰ گزینه ۲ فرم کلی معادله‌ای که مجموع ریشه‌ها  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌ها  $P$  باشد، به صورت:  $x^2 - Sx + P = 0$  است؛ پس:

$$x^2 + x - 1 - m^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = -1 \\ P = -1 - m^2 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-1)^2 - 2(-1 - m^2) = 3 + 2m^2$$

بدیهی است که همواره  $2m^2 \geq 0$ ؛ بنابراین کمترین مقدار عبارت  $\alpha^2 + \beta^2$  برابر ۳ است.

۳۱ گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5 \quad (1)$$

$$\text{فرض: } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = t \Rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = t^2 \Rightarrow$$

$$s + 2\sqrt{p} = t^2 \Rightarrow \frac{m+14}{36} + 2 \times \frac{1}{6} = t^2 \Rightarrow$$

$$\frac{m+26}{36} = t^2 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{m+26}}{6}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{m+26}}{6}}{\frac{1}{6}} = 5 \Rightarrow \sqrt{m+26} = 5 \Rightarrow m+26 = 25$$

$$\Rightarrow m = -1 \Rightarrow mx^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = -2$$

۳۲ گزینه ۲ ریشه‌های معادله  $x^2 - 3mx + m = 0$  را برابر با  $\alpha$  و  $\beta$  در نظر می‌گیریم. بنابر فرض داریم:

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} = 1 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta} = 1 \xrightarrow[\alpha\beta = \frac{m}{1} = m]{\alpha + \beta = \frac{-(-3m)}{1} = 3m} 3m - 2\sqrt{m} - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{m}=t}$$

$$3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{m} = 1 \checkmark \\ \text{یا} \\ \sqrt{m} = -\frac{1}{3} < 0 \text{ غلط} \end{cases} \Rightarrow m = 1 (*)$$

حاصل ضرب ریشه‌های معادله  $x^2 + mx - m = 0$  برابر است با:

$$P = \frac{-m}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} P = -\frac{1}{2}$$

۳۳ گزینه ۳ با توجه به اینکه ریشه‌های معادله اولی، نیم واحد از ریشه‌های معادله دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه‌های معادله اولی، یک واحد از مجموع ریشه‌های معادله دومی بیشتر است.

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \quad \alpha' + \beta' = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{2}, \quad \alpha'\beta' = (\alpha - 0.5)(\beta - 0.5) = \alpha\beta - 0.5(\alpha + \beta) + 0.25 = -\frac{6}{2\alpha} = -3$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{2} = -3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow \left[\frac{ab}{4}\right] = \left[-\frac{6}{4}\right] = -2$$

۳۴ گزینه ۳ در ابتدا باید بگوئیم  $a = 0$  قابل قبول است؛ زیرا در این صورت  $x = 0$  جواب صحیح معادله است.

حال اگر  $a \neq 0$  باشد، داریم:

$$\sqrt{x} = a - \sqrt{x-a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x = a^2 + x - a - 2a\sqrt{x-a} \Rightarrow \sqrt{x-a} = \frac{a-1}{2}$$

$$\rightarrow x = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2$$

برای اینکه  $x$  عددی صحیح باشد، لازم است  $a$  عددی فرد باشد که در بین اعداد طبیعی تکریمی مقادیر ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ قابل قبول اند.

پس در مجموع ۶ مقادیر صحیح و تکریمی برای  $a$  قابل قبول است.

۳۵ گزینه ۱ کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$A \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$  است که نقطه  $\begin{vmatrix} -1 \\ 3 \end{vmatrix}$  روی این تابع قرار دارد.

۳۶ گزینه ۲

در تابع درجه دوم  $y = ax^2 + bx + c$  رأس سهمی از رابطه  $x_S = -\frac{b}{2a}$  به دست می آید و این طول را در تابع قرار می دهیم عرض آن به دست می آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$  است که نقطه  $\begin{vmatrix} 5 \\ -9 \end{vmatrix}$  روی این تابع قرار دارد.

۳۷ گزینه ۲ رأس سهمی  $y = -ax^2 + ax + 2$  را می یابیم:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{a}{2(-a)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{4} + 2$$

$$\text{رأس} \left( \frac{1}{2}, \frac{a}{4} + 2 \right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی  $y = 2bx^2 - bx - 1$  قرار دارد.

$$\frac{a}{4} + 2 = 2b \times \frac{1}{4} - \frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + 2 = -1 \Rightarrow \frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = -12$$

حال رأس سهمی  $y = 2bx^2 - bx - 1$  را می یابیم:

$$x_{\text{رأس}} = -\frac{-b}{2 \times 2b} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 2b \times \frac{1}{16} - \frac{b}{4} - 1 = \frac{b}{8} - \frac{b}{4} - 1 \Rightarrow y = -\frac{b}{8} - 1 \Rightarrow \text{رأس} \left( \frac{1}{4}, -\frac{b}{8} - 1 \right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی  $y = -ax^2 + ax + 2$  قرار دارد.

$$-\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{39}{16} + 2 \xrightarrow{a=-12} -\frac{b}{8} - 1 = \frac{-36}{16} + 2 \Rightarrow -\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{4} + 2$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{8} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -6 \Rightarrow b - a = -6 - (-12) = 6$$

۳۸ گزینه ۳ محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \rightarrow \text{محور تقارن } x = \frac{-a}{2(1)} \\ y = -x^2 - 2x + b \rightarrow \text{محور تقارن } x = \frac{-(-2)}{2(-1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک‌اند، پس:

$$y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

جایگذاری  $x=1$  در سهمی دوم  $\rightarrow 1 = -1^2 - 2(1) + b \Rightarrow b = 4$

توجه: می‌توانستیم به جای  $x = 1$ ، ریشه  $x = -3$  را در معادله سهمی دوم جایگذاری کنیم.

۳۹ گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور  $x$ ‌ها باشد، آن است که  $a < 0$  و  $\Delta < 0$  باشد:

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

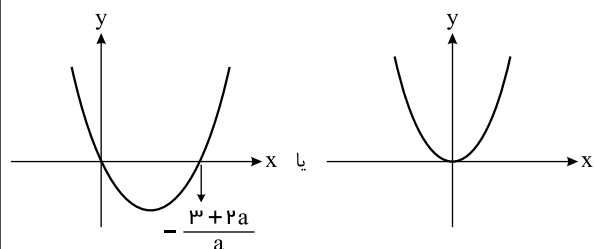
از اشتراک  $I$  و  $II$  به جواب  $2 < m < 5$  می‌رسیم.

۴۰ گزینه ۱ سهمی  $y = ax^2 + (3+2a)x$  مبدأ گذر است، زیرا:

$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + (3+2a)x = 0 \Rightarrow x(ax + 3 + 2a) = 0 \Rightarrow x = 0, ax + 3 + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3+2a}{a}$$

برای آن که سهمی از ناحیه سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشه معادله  $y = 0$  یعنی

$$x = -\frac{3+2a}{a} \text{ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.}$$



$$\Rightarrow \text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow -\frac{3+2a}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{3+2a}{a} \leq 0 \xrightarrow{a>0} 3+2a \leq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

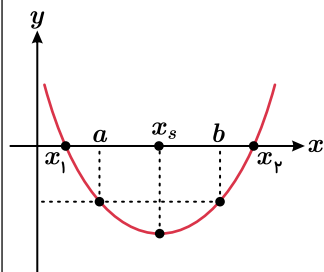
چون اشتراک  $a > 0$  و  $a \leq -\frac{3}{2}$  سهمی است، پس هیچ مقداری برای  $a$  وجود ندارد.

۴۱ گزینه ۱ توجه: با توجه به شکل زیر در هر سهمی، اگر  $a, b$  دو نقطه هم‌عرض باشند آنگاه:

$$x_s = \frac{a+b}{2}$$

و اگر  $x_1, x_2$  ریشه‌ها (صفرها) سهمی باشند آنگاه:

$$x_1 + x_2 = 2x_s$$



در یک سهمی، اگر دو نقطه هم‌عرض داشته باشیم، طول رأس سهمی میانگین طول این دو نقطه است. در این سؤال طول رأس سهمی  $x_s = \frac{3}{4}$  است و در نتیجه

$$\text{مجموع صفرهای سهمی برابر } 2x_s = \frac{3}{2} \text{ است.}$$

۴۲ گزینه ۲ مختصات نقطهٔ مینیمم تابع مختصات نقطهٔ رأس سهمی است؛ پس داریم:

$$y = x^2 - mx + 2 - m \Rightarrow S \left| \begin{array}{c} \frac{m}{2} \\ \frac{4(2-m)-m^2}{4} \end{array} \right| \text{ رأس سهمی}$$

باید طول و عرض نقطهٔ رأس سهمی مثبت باشد تا در ناحیهٔ اول باشد.

$$\begin{cases} \frac{m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 & (I) \\ \frac{8-4m-m^2}{4} > 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 8 < 0, \Delta = 16 + 32 = 48 \Rightarrow m = \frac{-4 \pm \sqrt{48}}{2} \end{cases}$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{1} = -2 \pm 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 - 2\sqrt{3} < m < -2 + 2\sqrt{3} \quad (II)$$

$$(I), (II) \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 < m < -2 + 2\sqrt{3}$$

بنابراین تنها عدد صحیحی که در این بازه وجود دارد،  $m = 1$  است.

۴۳ گزینه ۳ می‌دانیم که  $x = vt$  و از آنجا  $t = \frac{x}{v}$  است. اگر سرعت جریان آب را  $v$  در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب  $100 + v$  و در خلاف

جهت حرکت آب  $100 - v$  است.

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1200}{100+v} \text{ مسیر رفت} \\ t_2 = \frac{1200}{100-v} \text{ مسیر برگشت} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = (v - 20)(v + 500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قق} \\ v = -500 \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب  $v = 20$  برسید.

۴۴ گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در  $k$  ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در  $k + 9$  ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 20k + 180 \Rightarrow k^2 - 11k - 180 = (k - 18)(k + 10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 18 \\ k = -10 \text{ غق} \end{cases}$$

۴۵ گزینه ۴ می‌دانیم که  $x = vt$  و از آنجا  $t = \frac{x}{v}$  است. اگر سرعت پرواز پرنده را  $v$  در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت  $v + 5$  و سرعت برگشت  $v - 5$  است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1}{v+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{v-5} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = \underbrace{9}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \underbrace{\frac{9}{60}}_{\text{ساعت}}$$

$$\Rightarrow \frac{v-5+v+5}{(v+5)(v-5)} = \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=1600+900=2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ قق} \\ v_2 = \frac{40-50}{6} = -\frac{5}{3} \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب  $v = 15$  برسید.

۴۶ گزینه ۴ برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می‌رسانیم تا رادیکال‌ها از بین بروند.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=b^2-4ac=256-112=144} \begin{cases} a = \frac{16+12}{14} = 2 \text{ غق ق (در معادله صدق نمی‌کند).} \\ a = \frac{16-12}{14} = \frac{2}{7} \text{ قق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{5}{2}$$

۴۷ گزینه ۱

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a+16 = 1+4a^2-4a$$

$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} a = \frac{7+17}{8} = 3 \text{ غق (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7-17}{8} = \frac{-5}{4} \text{ قق} \end{cases}$$

پس:  $4a + 9 = 4\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = 4$

۴۸ گزینه ۲:  $x > 1$  شرط معادله

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \left( \frac{1}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{1}{3-\sqrt{x-1}} \right) = \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \sqrt{x+1} \left( \frac{3-\sqrt{x-1}-3-\sqrt{x-1}}{(3+\sqrt{x-1})(3-\sqrt{x-1})} \right) &= (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \times \frac{-2\sqrt{x-1}}{9-(x-1)} = \sqrt{x-1} \\ \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}{9-x+1} &= \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

با توجه به معادله اصلی  $x \neq 1$  است و می‌توان  $\sqrt{x-1}$  را در معادله فوق از طرفین ساده کرد.

$$\frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x-10 \quad (1) \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4(x+1) = (x-10)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \Delta = (-24)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 192$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{3}$$

در معادله (۱) باید  $x \geq 10$  باشد که در این صورت فقط  $x = 12 + 4\sqrt{3}$  قابل قبول است. پس معادله فوق فقط یک ریشه مثبت دارد.

۴۹ گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر  $\sqrt{2-x} = t$  داریم:

$$\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2-t} = \frac{t^2}{5t} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{2-t-(2+t)}{(2+t)(2-t)} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{-2t}{4-t^2} = \frac{t}{5}$$

یکی از ریشه‌های معادله فوق  $t = 0$  است، داریم:

$$\frac{-2}{4-t^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 4-t^2 = -10 \Rightarrow t^2 = 14 \Rightarrow t = \pm\sqrt{14}$$

چون  $t = \sqrt{2-x} \geq 0$  پس  $t = -\sqrt{14}$  غیر قابل قبول است، داریم:

$$t = 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$t = \sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{2-x} = \sqrt{14} \Rightarrow 2-x = 14 \Rightarrow x = -12$$

توجه کنید که  $x = 2$  غیر قابل قبول است، زیرا در سمت راست معادله مخرج را صفر می‌کند، بنابراین معادله جواب مثبت ندارد.

۵۰ گزینه ۴ می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، مقداری نامنفی است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{2-x} \rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

یعنی فقط  $x = 2$  می‌تواند قابل قبول باشد که آن را امتحان می‌کنیم.

$$\sqrt{2 \times 2 - 3} = \sqrt{2 + \sqrt{2-2}} - \underbrace{\sqrt{2-2}}_0 \quad \times \text{ غ ق}$$

در نتیجه معادله داده شده، فاقد ریشه حقیقی است.

۵۱ گزینه ۲

$$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ ax - y = 3 \Rightarrow y = ax - 3 \end{cases} \Rightarrow 3(ax - 3) + x = -9 \Rightarrow 3ax - 9 + x = -9 \Rightarrow x = 0$$

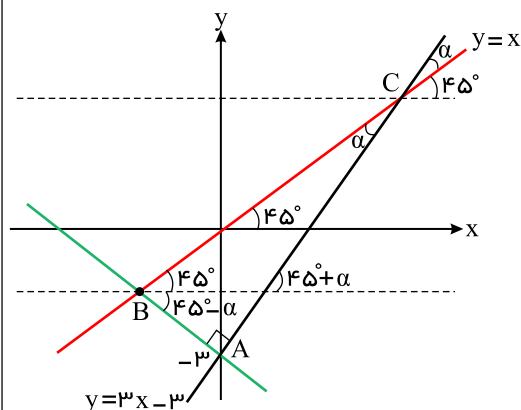
$$\Rightarrow A(0, -3) \Rightarrow y = -3$$

$$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ y - x = 0 \Rightarrow y = x \end{cases} \Rightarrow 3x + x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{4} = y \Rightarrow B(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4})$$

$$\begin{cases} ax - y = 3 \\ y - x = 0 \Rightarrow y = x \end{cases} \Rightarrow ax - x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{a-1} = y \Rightarrow C(\frac{3}{a-1}, \frac{3}{a-1})$$

از آنجایی که مرکز دایره بر نیمساز اول و سوم واقع است می‌توان نتیجه گرفت مرکز دایره بر روی خط گذرنده از نقاط  $B$  و  $C$  است. بنابراین

$$\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow (a = 3)$$



شیب خط  $(3x - 3)$   $\tan(45^\circ + \alpha) = 3$

$$\tan(45^\circ + \alpha) = 3$$

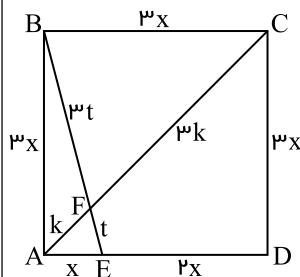
$$\tan 2(45^\circ + \alpha) = \frac{2 \tan(45^\circ + \alpha)}{1 - \tan^2(45^\circ + \alpha)} = \frac{2 \times 3}{1 - 9} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan(90^\circ + 2\alpha) = -\cot(2\alpha) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\hat{B} - \hat{C} = (90^\circ - \alpha) - (\alpha) = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \tan(90^\circ - 2\alpha) =$$

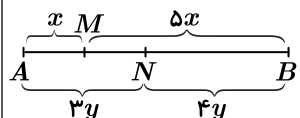
$$\cot 2\alpha = \frac{3}{4}$$

۵۲ گزینه ۱



$$\frac{t}{k} = \frac{BE}{AC} = \frac{4t}{4k} = \frac{\sqrt{10}x^2}{\sqrt{18}x^2} = \sqrt{\frac{10}{18}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۵۳ گزینه ۳



طبق شکل باید  $x + \Delta x = 3y + 4y$  باشد؛ بنابراین داریم:

$$6x = 7y \Rightarrow x = \frac{7}{6}y \quad (I)$$

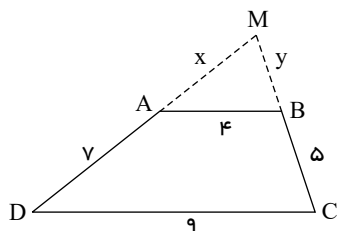
از طرفی طبق فرض  $MN = 22$ ؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$MN = 3y - x = 22 \quad (II)$$

$$(I), (II) \Rightarrow 3y - \frac{7}{6}y = 22 \Rightarrow \frac{11y}{6} = 22 \Rightarrow y = 12$$

$$AB \text{ پارمخت } = 7 \times 12 = 84 \Rightarrow \text{مجموع ارقام طول پارمخت } AB = 8 + 4 = 12$$

۵۴ گزینه ۲ شکل مقابل را در نظر بگیرید:

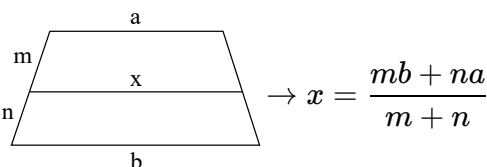


$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{x}{7+x} = \frac{y}{5+y} = \frac{4}{9} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{7+x} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 28 \rightarrow x = \frac{28}{5} \\ \frac{y}{5+y} = \frac{4}{9} \rightarrow 9y = 20 + 4y \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$MAB \text{ مثلث } = x + y + 4 = \frac{28}{5} + 4 + 4 = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}$$

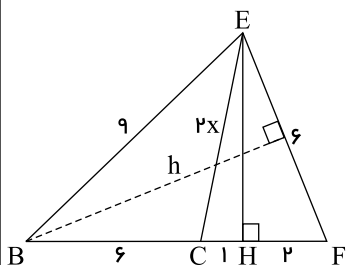
۵۵ گزینه ۳

می‌دانیم اگر در یک دوزنقه خطی موازی دو قاعده رسم شود طول پاره‌خط رسم شده از این رابطه به دست می‌آید:



$$\text{پس: } MN = \frac{(2 \times 12) + (3 \times 7)}{2 + 3} = \frac{45}{5} = 9$$

۵۶ گزینه ۴



$$AB \parallel CD \rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{CJ}{BE} = \frac{JF}{FE}$$

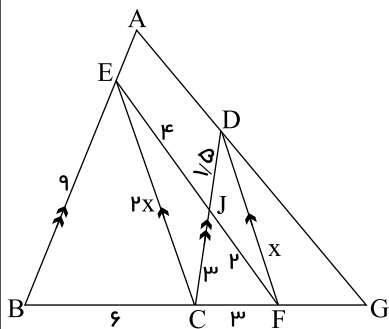
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{9} = \frac{CJ}{9} \rightarrow CJ = 3 \\ \frac{3}{9} = \frac{JF}{4 + FJ} \rightarrow FJ = 2 \end{cases}$$

$$JDF \sim EJC \Rightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{CJ}{JD} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{3}{JD} \Rightarrow JD = 1\frac{1}{2}$$

و چون نسبت تشابه دو مثلث  $JDF$  و  $EJC$  برابر ۲ است، داریم:

$$DF = x, EC = 2x$$

حال مثلث  $BEF$  را در نظر می‌گیریم:



$$h = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{BEF} = \frac{6 \times h}{2} = \frac{6 \times 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$$

از طرفی:

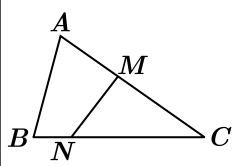
$$S_{BEF} = \frac{BF \times EH}{2} \Rightarrow 18\sqrt{2} = \frac{9 \times EH}{2} \rightarrow EH = 4\sqrt{2}$$

$$BH^2 = BE^2 - EH^2 \Rightarrow BH = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = 7 \rightarrow CH = 1$$

$$EC^2 = EH^2 + CH^2 \Rightarrow EC = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{33}$$

$$DF = \frac{1}{2}EC = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

۵۷ گزینه ۱



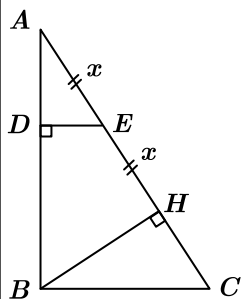
$$\Delta AM = 3CM \Rightarrow AM = \frac{3}{5}CM \Rightarrow AM + MC = \frac{4}{5}CM$$

$$\Rightarrow AC = \frac{4}{5}CM$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin \widehat{C}}{CN \cdot CM \cdot \sin \widehat{C}} = \frac{BC}{CN} \cdot \frac{4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CN} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{1}{4} = 0.25$$

۵۸ گزینه ۱



$\triangle ABC$  فیثاغورس در مثلث:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 16^2 + 12^2$

$$AC^2 = 256 + 144 = 400 \Rightarrow AC = 20$$

$$\triangle ABC : BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow BH \times 20 = 16 \times 12 \Rightarrow BH = 9,6$$

$\triangle BHC$  فیثاغورس در مثلث:  $HC^2 = BC^2 - BH^2 = 12^2 - (9,6)^2$

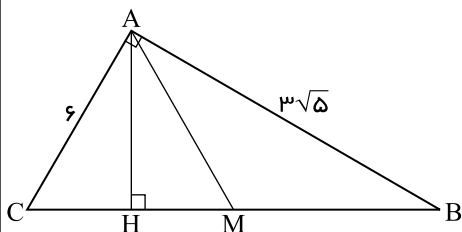
$$= 144 - 92,16 = 51,84 \Rightarrow HC = 7,2$$

$$\Rightarrow HC + 2x = 20 \Rightarrow x = 6,4$$

تالس:  $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{DE}{12} = \frac{6,4}{20} \Rightarrow 20DE = 76,8 \Rightarrow DE = 3,84$

۵۹ گزینه ۴

ابتدا شکل مسئله را رسم می کنیم:

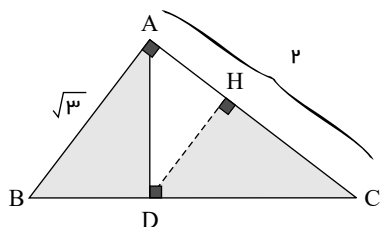


$$\triangle ABC : (AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \rightarrow 36 + 45 = (BC)^2 \rightarrow 81 = (BC)^2 \rightarrow BC = 9 \rightarrow BM = CM = 4,5$$

می دانیم:  $(AB)^2 = BH \cdot BC \rightarrow 45 = 9BH \rightarrow BH = 5 \rightarrow MH = 0,5$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{(\frac{1}{2})(h)(BC)}{(\frac{1}{2})(h)(MH)} = \frac{9}{0,5} = 18$$

۶۰ گزینه ۳ دو مثلث  $ABD$  و  $HDC$  متشابه هستند، پس نسبت مساحت های آنها برابر با مجذور نسبت تشابه است.



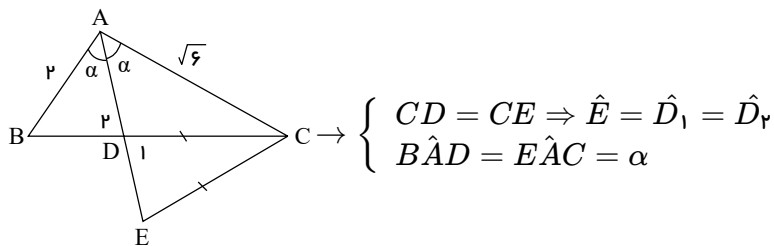
$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 = 7 \rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$(AC)^2 = BC \times DC \rightarrow 4 = \sqrt{7} \times DC \rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{\triangle HDC}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{16}{21}$$

۶۱ گزینه ۲

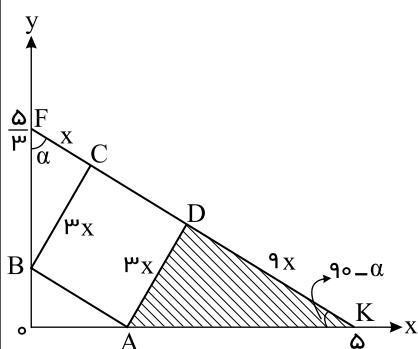
شکل مقابل را در نظر بگیرید:



بنابراین دو مثلث  $ABD$  و  $ACE$  در حالت دو زاویه مساوی با هم متشابه هستند و می دانیم که نسبت مثلث ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۶۲ گزینه ۲



$$\tan \alpha = \frac{5}{x} = 3 = \frac{BC}{CF}$$

$$\Rightarrow BC = 3CF \xrightarrow{CF=x} BC = 3x$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 + (5)^2 = (Fk)^2 \Rightarrow (Fk)^2 = \frac{250}{9} \Rightarrow Fk = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

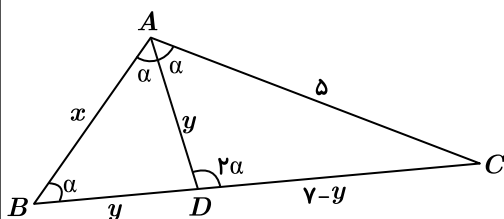
$$\tan(90 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{3} = \frac{AD}{Dk} \Rightarrow Dk = 9x$$

$$\Rightarrow S = 3x \left( \frac{5\sqrt{10}}{3} - x - 9x \right) = 3x \left( \frac{5\sqrt{10}}{3} - 10x \right) = 5\sqrt{10}x - 30x^2$$

$$S' = 5\sqrt{10} - 60x = 0 \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{10}}{60} = \frac{\sqrt{10}}{12}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3x \times 9x = \frac{27}{2} \times \frac{10}{(12)^2} = \frac{27 \times 5}{4 \times 12} = \frac{15}{16}$$

۶۳ گزینه ۴



نیمساز زاویه  $\hat{A}$  را رسم می کنیم تا  $BC$  را در  $D$  قطع کند. از آنجایی که  $\hat{A} = 2\hat{B}$ ، بنابراین

$$\triangle ADB \text{ متساوی الساقین بوده و } AD = BD$$

مثلث های  $\triangle ABC$  و  $\triangle DAC$  متشابه اند. با استفاده از نسبت تشابه حاصل داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{7-y} = \frac{7}{5}$$

ابتدا اندازه ی  $BD = y$  را به دست می آوریم و با استفاده از مقدار به دست آمده و نسبت تشابه،  $AB = x$  را محاسبه می کنیم.

$$\frac{5}{7-y} = \frac{7}{5} \Rightarrow y = \frac{24}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{7}{5}y = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$$

۶۴ گزینه ۳ بیشترین مقدار  $y$  در حالت  $\frac{x}{y} = \frac{4}{7} = \frac{5}{y}$  به دست می‌آید که برابر است با  $y = \frac{35}{4}$ .

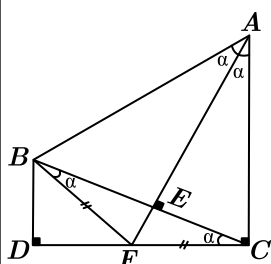
کمترین مقدار  $y$  در حالت  $\frac{4}{y} = \frac{x}{3} = \frac{5}{y}$  به دست می‌آید که برابر است با  $y = \frac{28}{5}$ .

$$\frac{35}{4} - \frac{28}{5} = \frac{63}{20} = 3\frac{1}{4}$$

بنابراین اختلاف مطلوب برابر است با:  $3\frac{1}{4}$

توجه شود که در بعضی حالات شرط نامساوی مثلث برقرار نیست.

۶۵ گزینه ۳



$F$  از دو سر  $BC$  به یک فاصله است، بنابراین  $AE$  عمود منصف  $BC$  است. در نتیجه زوایای مشخص شده در شکل با هم برابر

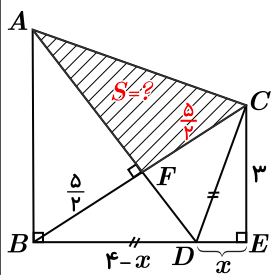
بوده و مثلث‌های  $ABE$  و  $BDC$  متشابه‌اند. می‌دانیم  $DC = 2BD$  پس  $AE = 2BE$ .

برای محاسبه مساحت  $ABE$  کافی است اندازه  $BE$  را محاسبه کنیم.

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 = 4 + 16 = 20 \rightarrow BC = 2\sqrt{5} \rightarrow BE = \frac{BC}{2} = \sqrt{5}, AE = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow S_{ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AE = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 5$$

۶۶ گزینه ۴ از دو سر پاره خط  $BC$  به یک فاصله است. پس  $DF$  عمود منصف است و  $DF = FC$



$$BC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$CD = BD, FD \perp BC \Rightarrow CF = BF = \frac{5}{2}$$

$$DC^2 = x^2 + 9$$

$$BD^2 = DC^2 = (4-x)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 9 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x = \frac{7}{8} \Rightarrow BD = DC = \frac{25}{8}$$

$$FD = \sqrt{\frac{625}{64} - \frac{25}{4}} = \frac{15}{8}$$

اکنون در مثلث  $ABD$  داریم:

$$DF \times AF = BF^2$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8} \times AF = \frac{25}{4} \Rightarrow AF = \frac{10}{3}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AF \times FC}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACF} = \frac{\frac{10}{3} \times \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{6}$$

۶۷ گزینه ۲ -  $y^2 - 1$  شمارنده ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^2 = 0, 4, 9, 25 \rightarrow y = 0, \pm 2, \pm 3, \pm 5$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتب‌های  $f$  تابع می‌شود.

۶۸ گزینه ۱  $x = 2, 5$  ریشهٔ مخرج کسر است؛ پس  $C = 10$ .

چون تابع در  $x = 1$  پیوسته است، پس داریم:

$$\frac{2 + a + b}{4 - 10} = 4 - 5$$

$$\Rightarrow a + b = 4$$

۶۹ گزینه ۱ با توجه به نمودار تابع،  $f$  در  $x = \frac{-1}{3}$  حد دارد؛ اما تعریف نشده است. بنابراین طبق ضابطه،  $x = \frac{-1}{3}$  هم ریشهٔ صورت و هم ریشهٔ مخرج عبارت

$$\frac{3x^2 + ax + b}{bx + c} \text{ است.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \frac{a}{3} + b = 0 \Rightarrow 3b - a = -1 & (1) \\ b\left(\frac{-1}{3}\right) + c = 0 \Rightarrow c = 2 \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{12 + 2a + b}{14} = 2 \Rightarrow b + 2a = 16 \Rightarrow x = 2 \text{ در } x \text{ پیوسته است.}$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} b = 2, a = 7 \Rightarrow ab = 14$$

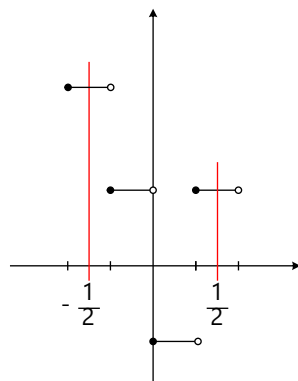
۷۰ گزینه ۲ روش اول: چون داخل براکت  $3x$  داریم طول پله‌ها  $\frac{1}{3}$  است تابع را در بازی  $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{3}$  رسم می‌کنیم که بازهٔ سؤال را شامل می‌شود.

$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

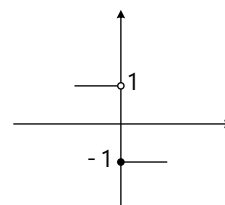
$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$$if: x \rightarrow \circ^+ \Rightarrow [3x] = \circ \Rightarrow y = -1$$

$$if: x \rightarrow \circ^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه  $x = \circ$  ناپیوسته است.

۷۱ گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$$

با تعیین علامت عبارت  $\frac{4-2x}{3x+1}$ ، نامعادله داده شده را حل می کنیم:

$$4-2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

| $x$                 | $-\infty$ | $-\frac{1}{3}$ | $2$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $\frac{4-2x}{3x+1}$ | -         | +              | -   | -         |

بنابراین  $-\frac{1}{3} < x \leq 2$  و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

مجموعه مقادیر  $[3x]$  شامل ۸ عضو است.

۷۲ گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است  $x$  را برحسب  $y$  به دست آورده و سپس جای  $x$  و  $y$  را عوض کنیم.

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 1 - 3 = (x-1)^2 - 4 \Rightarrow (x-1)^2 = y+4$$

$$\xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+4} \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می کنیم}} f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$$

حال با خط  $g(x) = \frac{x-a}{2}$  قطع می دهیم:

$$f^{-1}(x) = g(x) \Rightarrow 1 + \sqrt{x+4} = \frac{x-9}{2} \xrightarrow{\text{بررسی گزینه ها}} x = 21$$

توجه کنید حل معادله آخر بدین صورت است:

$$2\sqrt{x+4} = x-11 \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x+16 = x^2+121-22x \Rightarrow x^2-26x+105 = 0$$

$$\Rightarrow (x-21)(x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 21 & \text{قق} \\ x = 5 & \text{غقق (در معادله صدق نمی کند)} \end{cases}$$

۷۳ گزینه ۱

می‌دانیم:  $D_{f_g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

$$D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

ابتدا  $f^{-1}$  را می‌نویسیم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

و سپس  $g \circ f^{-1}$  را محاسبه می‌کنیم:

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

حال زوج مرتب  $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$  را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{g}{g \circ f^{-1}} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$

۷۴ گزینه ۴

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}, \quad g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\} \Rightarrow \text{برد} = \{2, -1\}$$

۷۵ گزینه ۳ می‌دانیم که  $f(a) = b \rightarrow f^{-1}(b) = a$  است. سؤال در حقیقت  $f^{-1}(6) + f^{-1}(12)$  را خواسته است.

$$\begin{aligned} f^{-1}(6) = a \rightarrow f(a) = 6 \rightarrow a + \sqrt{a} = 6 \rightarrow a = 4 \\ f^{-1}(12) = b \rightarrow f(b) = 12 \rightarrow b + \sqrt{b} = 12 \rightarrow b = 9 \rightarrow a + b = 13 \end{aligned}$$

۷۶ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 3x & x \leq -\frac{3}{2} \Rightarrow R_f = [\frac{13}{2}, \infty) \\ 2 + 2mx - x^2 & x > -\frac{3}{2} \Rightarrow 2 + 2m(-\frac{3}{2}) - (-\frac{3}{2})^2 \leq \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{9}{4} - 3m \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3m \leq \frac{13}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow -3m \leq \frac{27}{4} \Rightarrow m \geq -\frac{9}{4} \quad (1)$$

$$x = m \Rightarrow 2 + 2m^2 - m^2 + 2 < \frac{13}{2} \Rightarrow m^2 + 2 < \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow m^2 < \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{2}} < m < \frac{3}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m = -2$$

$$f^{-1}(-19) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = -19$$

$$\Rightarrow 2 - 4\alpha - \alpha^2 = -19 \Rightarrow \alpha^2 + 4\alpha - 21 = 0 \Rightarrow (\alpha + 7)(\alpha - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -7 & \text{ق ق} \\ \alpha = 3 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۷۷

گزینه ۲ ابتدا عرض نقطه برخورد را در خط قرار داده تا طول نقطه برخورد به دست آید:  $x = 20 \xrightarrow{\text{خط}} y = 1$

خط از نقطه  $(20, 1)$  می‌گذرد، پس وارون تابع هم از این نقطه می‌گذرد، در نتیجه تابع  $f$  از نقطه  $(1, 20)$  عبور می‌کند.

$$\Rightarrow f(1) = a + 1 = 20 \Rightarrow a = 19$$

توجه: اگر  $f$  و  $f^{-1}$  وارون یکدیگر باشند آنگاه:

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

۷۸

گزینه ۳ چون وارون تابع  $y = x - 4$  را در نقطه  $(a, -1)$  قطع می‌کند؛ پس تابع  $y = x + 4$  (وارون تابع  $y = x - 4$ ) را در نقطه  $(-1, a)$  قطع می‌کند؛ بنابراین باید مختصات نقطه  $(-1, a)$  هم در معادله خط  $y = x + 4$  و هم در معادله تابع  $y$  صدق کند، یعنی داریم:

$$(-1, a) \xrightarrow{y=x+4} a = -1 + 4 \Rightarrow a = 3$$

$$(-1, a) = (-1, 3) \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در تابع}} 3 = 1 + \sqrt{b+3} \Rightarrow \sqrt{b+3} = 2$$

$$\Rightarrow b+3 = 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a-b = 2$$

۷۹

گزینه ۴ باید مختصات نقطه  $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$  و همچنین نقطه  $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$  در معادله تابع  $y$  صدق کند.

$$\begin{cases} f(-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5} \Rightarrow -\frac{4}{5} = -\sqrt{a + \frac{9}{25}b} \\ f(-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{3}{5} = -\sqrt{a + \frac{16}{25}b} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{a + \frac{9}{25}b} = \frac{4}{5} \Rightarrow a + \frac{9}{25}b = \frac{16}{25} \\ \sqrt{a + \frac{16}{25}b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a + \frac{16}{25}b = \frac{9}{25} \end{cases} \Rightarrow b = -1, a = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = -1$$

۸۰ گزینه ۳ طبق فرض مسئله:

$$f(0.6) = 0.8, f(0.8) = 0.6$$

$$\begin{cases} \sqrt{a + 0.36b} = 0.8 \\ \sqrt{a + 0.64b} = 0.6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 0.36b = 0.64 \\ a + 0.64b = 0.36 \end{cases} \xrightarrow{\text{دو معادله را از هم کم می‌کنیم}} -0.28b = 0.28 \Rightarrow b =$$

$$-1 \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow ab = (1)(-1) = -1$$

۸۱

گزینه ۴ می‌دانیم که  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  و چون  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$  است، انتهای کمان در ناحیه سوم دایره مثلثاتی است و داریم:

$$\sqrt{1 + \tan^2 x} (2 \sin^2 \frac{\pi}{4} - \sin^2 x) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} \left( 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right) = \frac{1}{|\cos x|} (1 - \sin^2 x) = \frac{-1}{\cos x} (\cos^2 x)$$

$$= -\cos x$$

۸۲ گزینه ۱ می‌دانیم که  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  و چون  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  است، انتهای کمان در ناحیهٔ دوم دایرهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left( \frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left( \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\underbrace{1}_{|\cos x|}} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)$$

$$= -\cos^2 x$$

۸۳ گزینه ۴

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3,75$$

۸۴ گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ داده‌شده، مقدار کسینوس را به دست می‌آوریم:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

می‌دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۸۵ گزینه ۳

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -3 \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = -3 \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{1}{3}$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3\pi < 4x < 4\pi \Rightarrow \frac{3}{4}\pi < x < \pi \Rightarrow \sin x + \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left( 1 + \frac{1}{3} \right) = -\frac{4}{9} \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{-\frac{4}{9} \sqrt{3}} = \frac{-9}{4 \sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} = -0,75\sqrt{3}$$

۸۶ گزینه ۳ هر کدام از نسبت‌های مثلثاتی داده‌شده را حساب می‌کنیم.

$$\sin \frac{17\pi}{3} = \sin \left( 6\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \left( -\frac{17\pi}{6} \right) = \cos \frac{17\pi}{6} = \cos \left( 3\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{19\pi}{4} = \tan \left( 5\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = -\sin\frac{11\pi}{6} = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

بنابراین خواسته سؤال به صورت زیر است:

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{-17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{-11\pi}{6}\right) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

۸۷ گزینه ۲ زاویه‌ها را شکسته و بر حسب  $\frac{\pi}{4}$  می‌نویسیم.

$$A = \tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4} \cos\frac{13\pi}{4}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{16\pi - \pi}{4}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = -1 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

۸۸ گزینه ۲

$$\tan\frac{17\pi}{6} \sin\frac{11\pi}{3} + \cos\frac{10\pi}{3} = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\tan\frac{\pi}{6}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right) - \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \tan\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

۸۹ گزینه ۳ به کمک روابط مثلثاتی داریم:

$$\tan\alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos\alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin\alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot\alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{پس: } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0.27 \end{aligned}$$

۹۰ گزینه ۲

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = \tan(-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 480^\circ = \tan(360^\circ + 120^\circ) = \tan(120^\circ) = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840^\circ = \sin(4 \times 360^\circ + 120^\circ) = \sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{پس: } \tan(300^\circ) \cos(210^\circ) + \tan(480^\circ) \sin(840^\circ) = (-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۹۱ گزینه ۴

$$\tan 285^\circ = \tan(270^\circ + 15^\circ) = -\cot 15^\circ$$

$$\tan(-165^\circ) = -\tan 165^\circ = -\tan(180^\circ - 15^\circ) = \tan 15^\circ$$

$$\sin(1095^\circ) = \sin(6 \times 180^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ$$

$$\cos(255^\circ) = \cos(270^\circ - 15^\circ) = -\sin 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{پس: } \tan(285^\circ) \cdot \tan(-165^\circ) - \sin(1095^\circ) \cos(255^\circ) &= (-\cot 15^\circ)(\tan 15^\circ) - (\sin 15^\circ)(-\sin 15^\circ) \\ &= -1 + \sin^2 15^\circ = -(1 - \sin^2 15^\circ) = -\cos^2 15^\circ \end{aligned}$$

۹۲ گزینه ۲ ابتدا کمی عبارت را ساده کنیم.

$$\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot(2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)}$$

$$\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin 2\alpha \text{ و } \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

برای حل سؤال مقادیر  $\cos 2\alpha$ ,  $\sin 2\alpha$ ,  $\cot 2\alpha$  را نیاز داریم، که آنها را محاسبه می‌کنیم.

$$۱) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$۲) \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \sin \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$۳) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

$$۴) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$۵) \cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{7}{25}}{\frac{24}{25}} = \frac{7}{24}$$

حال خواسته سؤال را به دست می آوریم:

$$\frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25} - \left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{7}{24}} = \frac{44 \times 24}{25 \times 7} = \frac{1056}{175}$$

۹۳ گزینه ۳ راه حل اول:

مخرج مشترک گرفته و ساده می کنیم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta)}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta}{(1 - \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2 \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{2 \times 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

راه حل دوم:

$$\frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = 2 \cot \frac{\theta}{2}$$

۹۴ گزینه ۳ چون دو نقطه به طول های ۱ و ۳ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = g(1) \rightarrow 3^{A+B} = 1 = 3^0 \rightarrow A+B = 0 \\ f(3) = g(3) \rightarrow 3^{3A+B} = 9 = 3^2 \rightarrow 3A+B = 2 \end{array} \right\} \rightarrow A = 1, B = -1$$

$$\text{پس: } f(x) = 3^{x-1} \rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۹۵ گزینه ۲ دو نقطه داده شده را در تابع  $f(x) = -4 + 2^{ax+b}$  صدق می دهیم.

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ -2 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} -2 = -4 + 2^b \rightarrow 2^b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$\left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = -4 + 2^{\frac{-1}{3}a+1} \rightarrow 2^{\frac{-1}{3}a+1} = 2^2 \rightarrow -\frac{1}{3}a+1 = 2 \rightarrow a = -3$$

$$\text{پس: } f(x) = -4 + 2^{-3x+1} \rightarrow f\left(\frac{-5}{3}\right) = -4 + 2^{5+1} = -4 + 64 = 60$$

۹۶ گزینه ۱ دو نقطه داده شده را در تابع  $f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$  صدق می دهیم.

$$\left| \begin{array}{l} 0 \\ -6 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} -6 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b \rightarrow 3 = 3^{-b} \rightarrow -b = 1 \rightarrow b = -1$$

$$\left| \frac{1}{2} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} 0 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}} - 1 \rightarrow 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{2}} - 1 \rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{a}{2}} + 1 \rightarrow -\frac{a}{2} + 1 = 2 \rightarrow -\frac{a}{2} = 1$$

$$\rightarrow a = -2$$

$$\text{پس: } f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \rightarrow f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = -9 + 3^5 = -9 + 243 = 234$$

۹۷ گزینه ۱

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow{\text{واحد چپ}} y_1 = 2^{x+3+|x+3|} \xrightarrow{\text{واحد پایین}} y_2 = 2^{x+3+|x+3|} - 2$$

$$\xrightarrow{y=0} 2^{x+3+|x+3|} = 2^1 \rightarrow x+3+|x+3| = 1 \rightarrow x+|x+3| = -2 \xrightarrow{\text{چک کردن گزینه‌ها}} x = -\frac{5}{2}$$

۹۸ گزینه ۴ چون دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ محل برخورد این دو تابع است؛ پس:

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 1 - 1 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 2 \rightarrow 2^{-A-B} = 2 \rightarrow -A-B = 1 \\ f(2) = g(2) \rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 - 2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 4 \rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \rightarrow -2A-B = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A-B = 1 \\ -2A-B = 2 \end{cases} \rightarrow A = -1, B = 0 \rightarrow f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$$

$$\Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 2^3 = -2 + 8 = 6$$

۹۹ گزینه ۲ برای شرط داده‌شده در مجموعه A داریم:

$$8^{-\frac{2}{3}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{2}{3}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-2n} + 2^{-2m-2n} > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-2n+1} > 2^{-7} \xrightarrow{\text{پایه بزرگتر از ۱}} -2m-2n+1 > -7 \Rightarrow m+n < 4$$

$$\xrightarrow{m,n \in \mathbb{N}} (m,n) = (1,1)(1,2)(2,1)$$

$$A = \{1^3 + 1^2, 1^3 + 2^2, 2^3 + 1^2\} = \{2, 5, 9\}$$

$\downarrow$   
max

۱۰۰ گزینه ۲

$$2^{|x|} = (0,25)^{x^2-x} \Rightarrow (2^2)^{|x|} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-x}$$

$$\Rightarrow 4^{|x|} = 4^{-x^2+x} \Rightarrow |x| = -x^2 + x$$

$$\begin{cases} x \geq 0 : & x = -x^2 + x \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x < 0 : & -x = -x^2 + x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2 \end{cases}$$

اما پاسخ  $x = 2$  غیرقابل قبول است، چراکه در این صورت  $|x| = 2$  و  $-x^2 + x = -2$  که برابر نخواهند شد؛ بنابراین تنها جواب این معادله  $x = 0$  است. یعنی معادله یک جواب دارد.

۱۰۱ گزینه ۱ عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، باید نامنفی باشد. جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال به صورت زیر است:

|                      |   |   |
|----------------------|---|---|
| x                    | 0 | 1 |
| x                    | - | + |
| $\log_{\frac{x}{5}}$ | + | - |
| P                    | + | - |

$$D_f = (0, 1)$$

در دامنه تابع  $f$ ، هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

گزینه ۱ می‌دانیم که  $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$  و  $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$  و  $\log_k^{a^n} = \frac{n}{m} \log_k^a$  است.

$$\log_{12}^6 = \frac{\log_6^6}{\log_6^{12}} = \frac{\log_6^2 + \log_6^3}{\log_6^2 + \log_6^3} = \frac{\log_6^2 + 0.8}{1 + 0.8} = \frac{\frac{1}{2} + 0.8}{1.8} = \frac{1.3}{1.8} = \frac{13}{18}$$

گزینه ۲ می‌دانیم که  $\log_k^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^k}$  و  $\log_k^{ab} = \log_k^a + \log_k^b$  و  $\log_k^{a^n} = n \log_k^a$  است.

$$\log_{18}^8 = \frac{\log_3^8}{\log_3^{18}} = \frac{\log_3^{2^3}}{\log_3^{2^9}} = \frac{3 \log_3^2}{2 + \log_3^2} = \frac{\frac{15}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

۱۰۴ گزینه ۱ روش اول:

$$(1) \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow |x| \geq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$(2) \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} \quad \begin{array}{c|cc} & -1 & 2 \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

روش دوم: عددگذاری

$$\text{اگر } x = 2 \Rightarrow \log^{(2^2-2-2)} = \log^0 \Rightarrow \text{غیر قابل قبول}$$

پس عدد ۲ در دامنه عبارت نیست فقط گزینه ۳ حذف می‌شود.

$$\text{گزینه ۲ و ۴ نیز حذف می‌شوند.} \Rightarrow \text{غیر قابل قبول} \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{-1} \Rightarrow x = 0 \text{ اگر}$$

۱۰۵ گزینه ۴

چون پایه لگاریتم عدد ۲۱ می‌باشد بنابراین اعداد ۱۴۷ و ۱۳۲۳ را به ۲۱ تقسیم می‌کنیم.

$$1323 = 21^2 \times 3, \quad 147 = 21 \times 7 \Rightarrow A = (\log_{21}^3)^2 + \log_{21}^{(21 \times 7)} \log_{21}^{(21^2 \times 3)}$$

$$A = (\log_{21}^3)^2 + \underbrace{(\log_{21}^{21} + \log_{21}^7)}_1 \underbrace{(\log_{21}^{21^2} + \log_{21}^3)}_1 A = (\log_{21}^3)^2 + (1 + \log_{21}^7) \cdot (2 \log_{21}^{21} + \log_{21}^3)$$

می دانیم:

$$3 \times 7 = 21 \Rightarrow \log_{r_1}^3 + \log_{r_1}^7 = \log_{r_1}^{21} \Rightarrow \log 7 = 1 - \log 3$$

$$A = (\log_{r_1}^3)^2 + (1 + 1 - \log_{r_1}^3) \cdot (2 + \log_{r_1}^3) = (\log_{r_1}^3)^2 + (4 - (\log_{r_1}^3)^2)$$

$$A = (\log_{r_1}^3)^2 + 4 - (\log_{r_1}^3)^2 = 4$$

۱۰۶ گزینه ۱ با استفاده از خواص لگاریتم داریم:

$$\log_{\lambda} 18 = m \Rightarrow \log_{r^r} (2 \times 3^2) = \frac{1}{r} \log_r (2 \times 3^2) = m \Rightarrow \log_r 2 + \log_r 3^2 = 3m \Rightarrow 1 + 2 \log_r 3 = 3m$$

$$\Rightarrow \log_r 3 = \frac{3m - 1}{2}$$

خواسته سؤال به صورت زیر به دست می آید:

$$\log_{r^r} 12 = \log_{r^r} (2^2 \times 3) = \frac{1}{r} \log_r (2^2 \times 3) = \frac{1}{r} (\log_r 2^2 + \log_r 3) = \frac{1}{r} (2 + \log_r 3) = \frac{1}{r} (2 + \frac{3m - 1}{2})$$

$$= \frac{1}{r} (\frac{4 + 3m - 1}{2}) = \frac{3m + 3}{4} = \frac{3}{4} (m + 1)$$

۱۰۷ گزینه ۱ داریم:

$$\log_n^m = a \xrightarrow{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log^m}{\log^n} = a \Rightarrow \log m = a \cdot \log n$$

$$b = \log_{mn}^{m^r n} \xrightarrow{\text{تغییر مبنا}} \frac{\log^{m^r n}}{\log^{mn}} = \frac{r \log m + \log n}{\log m + \log n} = \frac{ra \log n + \log n}{a \log n + \log n}$$

$$\Rightarrow b = \frac{ra + 1}{a + 1} = \frac{a + 1 + a}{a + 1} = 1 + \frac{a}{a + 1}$$

چون  $0 < a < a + 1$  پس داریم:

$$0 < \frac{a}{a + 1} < 1 \Rightarrow 1 < b < 2 \Rightarrow [b] = 1$$

۱۰۸ گزینه ۴

$$\log_a x + 3 \log_{x^r} 3 = \underbrace{\frac{\log x}{r \log 3}}_a + \underbrace{\frac{3 \log 3}{r \log x}}_b$$

$$ab = \frac{3}{r} \xrightarrow{a, b > 0} a = b = \frac{\sqrt{3}}{r}$$

$$\min\{a + b\} = \frac{\sqrt{3}}{r} + \frac{\sqrt{3}}{r} = \sqrt{3}$$

۱۰۹ گزینه ۱

$$(\circ/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^r} \rightarrow (\frac{5}{10})^{2x-1} = (\frac{5}{r})^{r x^r} \rightarrow (\frac{r}{5})^{2x-1} = (\frac{r}{5})^{-3x^r}$$

$$\rightarrow 2x - 1 = -3x^r \rightarrow 3x^r + 2x - 1 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

در عبارت خواسته شده نمی توانیم به جای  $x$  عدد  $-1$  را قرار دهیم چون جلوی لگاریتم منفی می شود و می دانیم که  $\log_{k^m}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  است.

$$\log_{\lambda}^{9x+1} \stackrel{x=\frac{1}{9}}{=} \log_{\lambda}^{\frac{1}{9}} = \log_{\lambda^{\frac{1}{9}}}^{\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}$$

۱۱۰ گزینه ۳ می دانیم:

$$y = \log_{\frac{1}{2}}^{x-2} \xrightarrow{\text{دامنه}} x-2 > 0 \rightarrow \boxed{x > 2}$$

$$3^{x^2-2} = 81^x \rightarrow 3^{x^2-2} = 3^{4x} \rightarrow x^2 - 2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = 2$$

$$\rightarrow (x-2)^2 - 4 = 2 \rightarrow (x-2)^2 = 6 \rightarrow x-2 = \pm\sqrt{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{6} \\ x = 2 - \sqrt{6} < 2 \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

می دانیم  $\log_{k^m}^a = \frac{n}{m} \log_k^a$  است.

$$\log_{\frac{1}{2}}^{x-2} \stackrel{x=2+\sqrt{6}}{=} \log_{\frac{1}{2}}^{2+\sqrt{6}-2} = \log_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{6}} = \log_{\frac{1}{2}^{\frac{1}{\sqrt{6}}}}^{\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{1}{2}$$

۱۱۱ گزینه ۱ می دانیم:

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x^y}$$

$$\Rightarrow \log_x^y - \frac{2}{\log_x^y} = 1 \xrightarrow{\log_x^y=t} t - \frac{2}{t} = 1 \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -1 \Rightarrow \log_x^y = -1 \Rightarrow x^{-1} = y \Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ t = 2 \Rightarrow \log_x^y = 2 \Rightarrow x^2 = y \end{cases}$$

۱۱۲ گزینه ۳

$$\log_2(4^x + 15) = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 2^{x+3} \Rightarrow 4^x + 15 = 2^x \times 2^3 \Rightarrow 4^x + 15 = 8 \times 2^x$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0 \Rightarrow (2^x - 3)(2^x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 3 \Rightarrow x_1 = \log_2 3 \\ 2^x = 5 \Rightarrow x_2 = \log_2 5 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2$$

$$= \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

۱۱۳ گزینه ۴

$$\log 30 = \log^3 + \log^1 0 = 1,4, \log^6 = \log^2 + \log^3 = 0,7$$

$$\log^{\frac{5}{6}} = \log^5 - \log^6 = (\log^1 0 - \log^2) - (\log^2 + \log^3) = 0,7 - 0,7 = 0$$

$$\Rightarrow 1,4x^2 + 1,4x = 0 \Rightarrow 1,4x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف ریشه ها} = 1$$

۱۱۴ گزینه ۴ می دانیم:  $\log_b^a = c \Rightarrow b^c = a$  و  $\log_n^A + \log_n^B = \log_n^{A \cdot B}$

ابتدا معادله را حل می کنیم:

$$\log_2((x-2)(x^2+2x+4)) = \log_2(x^3-8) = 3 \Rightarrow x^3-8=8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}$$

پس داریم:

$$\log_{\sqrt[4]{2}} x = \log_{2^{\frac{1}{4}}} 2^{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{4}} = 4$$

۱۱۵ گزینه ۱

$$\begin{aligned} \log_{14} 10 &= \frac{\log_2 10}{\log_2 14} = \frac{\log_2 5 + 1}{\log_2 7 + 1} = \frac{\frac{1}{\log_5 2} + 1}{\log_2 7 + 1} \\ &= \frac{2 + 1}{2.8 + 1} = \frac{3}{3.8} = \frac{30}{38} = \frac{15}{19} \end{aligned}$$

۱۱۶ گزینه ۳

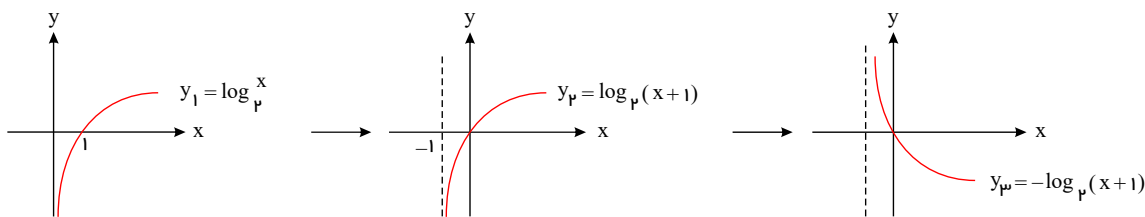
$$\log_2^3 = 1.6 \Rightarrow \log_3^2 = \frac{1}{1.6} = \frac{5}{8}$$

با استفاده از رابطه  $\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$  و قرار دادن  $c = 3$  داریم:

$$\log_6^5 = \frac{\log_3^5}{\log_3^6} = \frac{\log_2^5 + \log_2^3}{\log_2^5 + \log_2^3} = \frac{\frac{5}{8} + 1}{\frac{5}{8} + 1} = \frac{13}{8} = \frac{13}{20} = 0.65$$

۱۱۷ گزینه ۲ روش اول:

نمودار تابع داده شده  $y = \log_2^x$  است که یک واحد به سمت چپ برده شده و سپس نسبت به محور  $x$  ها قرینه شده است.



$$\text{پس: } y = -\log_2^{-(x+1)} \rightarrow y = \log_2^{(x+1)^{-1}} \rightarrow U(x) = (x+1)^{-1}$$

روش دوم:

با توجه به شکل، دامنه تابع داده شده  $x > -1$  است بنابراین گزینه های سوم و چهارم حذف می شوند. با توجه به شکل وقتی  $x \rightarrow (-1)^+$  نمودار تابع به سمت  $+\infty$  می رود.

$$\text{نادرست: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_2^-(x+1) = \log_2^{\circ+} = -\infty$$

$$\text{گزینه دوم: } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \log_2^{\frac{1}{x+1}} = \log_2^{\frac{1}{\circ+}} = \log_2^{(+\infty)} = +\infty$$

توجه کنید اگر  $a > 1$  باشد  $\log_a^{\circ+} = -\infty$  و  $\log_a^{+\infty} = +\infty$  است.

۱۱۸ گزینه ۲

$$\text{با توجه به شکل } x > \frac{a}{2} \xrightarrow{x > \frac{a}{2}} 2x + a > 0 \rightarrow 2x > -a \rightarrow x > -\frac{a}{2} \rightarrow a = -1$$

بنابراین تابع به صورت  $y = -1 + \log_b^{(2x-1)}$  است، از طرفی مقدار تابع در  $x = 2$  برابر صفر است.

$$0 = -1 + \log_b^3 \rightarrow \log_b^3 = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow y = -1 + \log_3^{(2x-1)}$$

اکنون کافی است که به جای  $y$  مقدار ۱ را قرار دهیم.

$$1 = -1 + \log_3^{(2x-1)} \rightarrow \log_3^{(2x-1)} = 2 \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow a = b^c} 2x - 1 = 3^2 \rightarrow 2x - 1 = 9 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow x = 5$$

۱۱۹ گزینه ۲

می‌دانیم:

$$a^{\log_a^b} = b$$

ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

$$y = 9^{\log_3^x} \Rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ D_f = (0, +\infty) \end{matrix}$$

$$f(x) = 9^{\log_3^x} = 3^{2 \log_3^x} = 3^{\log_3^{x^2}} = x^2$$

$$D_f: (0, +\infty)$$

البته دقت کنید که دامنه تابع  $x > 0$  است.

۱۲۰ گزینه ۳

$$y = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow M(1, 1) \\ x = 3 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow N(3, 9) \end{cases}$$

نقاط  $M$  و  $N$  در تابع  $f(x) = 3^{Ax+B}$  صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(1) = 1 \Rightarrow 3^{A+B} = 1 \Rightarrow A+B = 0, \quad f(3) = 9 \Rightarrow 3^{3A+B} = 9 \Rightarrow 3A+B = 2$$

$$- \begin{cases} A+B=0 \\ 3A+B=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{2A=2 \Rightarrow A=1 \Rightarrow B=-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 3^{x-1} \Rightarrow f(0) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۱۲۱ گزینه ۱ در هر مدت یک ماه (۳۰ روز)  $\frac{1}{10}$  جرم را از دست می‌دهد. بنابراین  $\frac{9}{10}$  جرم باقی می‌ماند. پس بعد از ۲ ماه مقدار  $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times 24$  باقی

می‌ماند و پس از  $n$  ماه مقدار  $\underbrace{\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \dots}_{n \text{ تا}} \times 24$  جرم باقی می‌ماند، پس:

$$24 \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{1}{3}$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{9}{10}\right)^n = \log \frac{1}{3} \Rightarrow n \cdot \log \frac{9}{10} = \log 1 - \log 3$$

$$n(\log 3^2 - \log 10) = 0 - \log 3 \Rightarrow n(2 \log 3 - 1) = -\log 3$$

$$n(0.96 - 1) = -0.48 \Rightarrow n = \frac{0.48}{0.04} = 12 \text{ ماه}$$

$$۱۲ \times ۳۰ = ۳۶۰ \quad \text{روز}$$

۱۲۲ گزینه ۲ چون در هر روز ۴ لیتر از محلول ۱۰۰ لیتری کم می‌شود، پس غلظت آن هر روز به  $\frac{۹۶}{۱۰۰}$  غلظت قبل می‌رسد. پس:

$$a_n = a \cdot \left(\frac{۹۶}{۱۰۰}\right)^n$$

که  $a_n$  غلظت در روز  $n$ ام و  $a$  غلظت اولیه و  $n$  تعداد روزها می‌باشد.

$$a \cdot \left(\frac{۹۶}{۱۰۰}\right)^n = \frac{۱}{۳}a \rightarrow \left(\frac{۹۶}{۱۰۰}\right)^n = \frac{۱}{۳}$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\log\left(\frac{۹۶}{۱۰۰}\right)^n = \log \frac{۱}{۳} \rightarrow n(\log ۹۶ - \log ۱۰۰) = \log ۱ - \log ۳ \rightarrow n(\log ۲^۵ \times ۳ - ۲) = -\log ۳$$

$$\rightarrow n(۵ \log ۲ + \log ۳ - ۲) = -۰٫۴۸ \rightarrow n = \frac{\frac{۴۸}{۱۰۰}}{\frac{۲}{۱۰۰}} = ۲۴$$

۱۲۳ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow (-۲)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-۲)^+} ۲ \left[ \frac{۲-x}{۲} \right] + a \left[ \frac{x+۲}{۳} \right]$$

$$= ۲ [۲^-] + a [۰^+] = ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow (-۲)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-۲)^-} ۲ \left[ \frac{۲-x}{۲} \right] + a \left[ \frac{x+۲}{۳} \right]$$

$$= ۲ [۲^+] + a [۰^-] = ۴ - a$$

$$۴ - a = ۲ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow \left[ \frac{a}{۳} \right] = \left[ \frac{۲}{۳} \right] = ۰$$

۱۲۴ گزینه ۳ حد تابع در  $x = -۴$  موجود است؛ بنابراین حد راست و حد چپ باید در این نقطه موجود و برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -۴^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۴^+} \left[ \frac{۲-x}{۲} \right] - a \left[ \frac{x+۴}{۵} \right] = [۳^-] - a [۰^+] = ۲ \\ \lim_{x \rightarrow -۴^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۴^-} \left[ \frac{۲-x}{۲} \right] - a \left[ \frac{x+۴}{۵} \right] = [۳^+] - a [۰^-] = ۳ + a \end{cases}$$

$$۳ + a = ۲ \Rightarrow a = -۱ \Rightarrow [a] = -۱$$

۱۲۵ گزینه ۲ ابتدا توجه می‌کنیم که داریم:

$$\lambda x^۳ - x = x(\lambda x^۲ - ۱)$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{\lambda}^- : x < -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow x^۲ > \frac{1}{\lambda^۲} \Rightarrow \lambda x^۲ - ۱ > ۱ \Rightarrow x(\lambda x^۲ - ۱) < -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow [x(\lambda x^۲ - ۱)] = -۱ \quad (I)$$

$$x \rightarrow -\frac{1}{\lambda}^+ : x > -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow x^۲ < \frac{1}{\lambda^۲} \Rightarrow \lambda x^۲ - ۱ < ۱ \Rightarrow x(\lambda x^۲ - ۱) > -\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda x^۳ - x = -\frac{1}{\lambda} + \varepsilon < ۰$$

$$\Rightarrow [x(\lambda x^۲ - ۱)] = -۱ \quad (II)$$

بنابراین طبق (I) و (II) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{\lambda}} [\lambda x^۳ - x] = -۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2b}{ax - b} = \frac{0}{\infty} \Rightarrow \infty a - b = 0 \Rightarrow b = \infty a$$

$$\text{راه اول} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty a (\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2)}{a \cdot (x - \infty)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\infty \sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2)(\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2)}{(x - \infty)(\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty (\sqrt[3]{x} - 2)}{(x - \infty) \times 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times (\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{2(x - \infty)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{\infty}$$

$$\text{راه دوم} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b \frac{\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{2\sqrt[3]{2 + \sqrt[3]{x}}}}{a} = \frac{\infty a \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{\infty}}{2a} = \frac{1}{6}$$

۱۲۷ گزینه ۱ کافی است حد چپ تابع در  $x = -2$  و مقدار تابع در  $x = -2$  با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\infty + x^3}{\underbrace{|x + 2|}_{=0}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} = -12$$

در ضمن  $f(-2) = a$  است پس  $a = -12$  است.

۱۲۸ گزینه ۴ شرط آن که تابع  $f$  در  $x = a$  پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در  $x = a$  موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(2 \sin x + 1)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} = \frac{-(2 + 1)}{2 + 0} = -1.5$$

توجه کنید که  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$  است، پس  $a = -1.5$  است.

۱۲۹ گزینه ۱ طبق فرض، تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$  در نقطه‌ای حد دارد ولی در آن نقطه پیوسته نیست؛ این نقطه اولاً  $x = 1$  بوده و ثانیاً  $x = 1$  ریشه

صورت  $f$  نیز هست، پس:

$$x^2 + ax + b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \quad (I)$$

همچنین  $x = 1$  ریشه معادله داده شده است:

$$5x^2 - ax + b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

$$\left[\frac{b-2a}{3}\right] = \left[\frac{-3-4}{3}\right] = \left[\frac{-7}{3}\right] = -3$$

۱۳۰ گزینه ۱

$$x = a \text{ پیوستگی در نقطه} \Rightarrow \frac{2 \sin b}{3\sqrt{a+2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} = \frac{\sqrt{3a^2 + (m-1)a + (m-4)}}{|a^3 + ((m-7)a + a)^2|}$$

$$\Rightarrow a^3 + ((m-6)a)^2 = a^3 + (m-6)^2 a^2 = a^2(a + m - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 6 - m \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(6-m)^2 + (m-1)(6-m) + m - 4 = 3(36 + m^2 - 12m) + (-m^2 - 7m - 6) + m - 4 = 2(m - 7)^2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 7 \Rightarrow a = 6 - m = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 6x + 3}}{|x^3 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3 + 1|} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x+1||x^2 - x + 1|} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

۱۳۱ گزینه ۱ شرط این که تابع  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، این است که در نقطه  $x = a$  نیز پیوسته باشد. یعنی باید داشته باشیم:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3}{x+a} = \frac{3}{2a} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a-1}{x-1} = \frac{a-1}{a-1} = 1 \end{cases}$$

حال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \rightarrow \frac{3}{2a} = 1 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

اما توجه شود که به ازای  $a = \frac{3}{2}$ ، ضابطه تابع  $f$  به صورت زیر خواهد بود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x + \frac{3}{2}}, & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{x-1}, & x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس به ازای هیچ مقدار  $a$  تابع  $f$  نمی تواند در  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد.

۱۳۲

$$\text{گزینه ۱ می دانیم که } |f(x)| \leq k \xrightarrow{k>0} -k \leq f(x) \leq k \text{ و } |f(x)| \geq k \xrightarrow{k>0} \begin{cases} f(x) \geq k \\ \text{یا} \\ f(x) \leq -k \end{cases} \text{ است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در  $x = 0$  و  $x = 2$  نیز پیوسته است.

$$x = 0 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = b \rightarrow b = 0 \\ f(0) = b \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1)[x] = 1[2^-] = 1 \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = \frac{-3}{2} \\ f(2) = 4 + 2a \end{cases}$$

۱۳۳ گزینه ۴

$$f(x) = [x] \sin \pi x, \quad -2 \leq x \leq 2$$

اعداد  $1, 0, -1$  داخل جزء صحیح را صحیح کرده و باعث ناپیوستگی آن می شوند ولی چون این سه عدد  $\sin \pi x$  را صفر می کنند (ضریب صفرشونده) نقاط ناپیوستگی محسوب نمی شوند. همچنین در ابتدای بازه پیوستگی راست و در انتهای بازه پیوستگی چپ برقرار است. پس این تابع روی بازه مورد نظر پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

۱۳۴ گزینه ۱ تابع  $f$  در نقاط  $x = 1$  و  $x = 5$  پیوسته است، پس:

$$x = 1 \text{ در } \tan \frac{3\pi}{4} : \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{|x^2 + x - 2|}^{(x+2)(x-1)}}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} \Rightarrow -1 = \frac{3}{-a} \Rightarrow a = 3$$

$$x = 5 \text{ در } b(5 - [-5]) : \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} \Rightarrow 1 \circ b = \frac{28}{3(-4)} \Rightarrow b = \frac{-7}{3 \circ}$$

$$a \times b = 3 \times \left(\frac{-7}{3 \circ}\right) = \left(\frac{-7}{1 \circ}\right) = -\circ, 7$$

۱۳۵ گزینه ۴ برای اینکه تابع در نقطه  $x = a$  پیوسته باشد، باید حد صورت کسر نیز در  $x = a$  برابر صفر باشد؛ از طرفی  $2a$  نیز ریشه  $f$  است، بنابراین معادله

$$x^2 + mx + n = 0 \text{ قابل بازنویسی به صورت } (x - 2a)(x - a) = 0 \text{ است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + mx + n}{a - x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x - 2a)}{-(x - a)} = a$$

$$\rightarrow a = 2$$

$$\rightarrow (x - 2)(x - 4) = x^2 - 6x + 8 = x^2 + mx + n$$

$$\Rightarrow m = -6, n = 8 \Rightarrow n - m = 14$$

۱۳۶ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{mx^2 + n}{a - x} ; & x \neq a \\ 1 & ; x = a \end{cases}$$

$a$  ریشه مخرج است و  $f$  روی  $\mathbb{R}$  پیوسته است؛ بنابراین حد  $f$  در  $x = a$  موجود است و  $a$  باید ریشه صورت نیز باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 1$$

$$ma^2 + n = 0 \quad (1)$$

$$\text{قاعده هوییتال} \Rightarrow \frac{2mx}{-1} = 1 \Rightarrow 2ma = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2m}$$

(قاعده هوییتال: برای رفع ابهام  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  می توان از صورت جدا و مخرج جدا مشتق گرفت. حد کسر جدید برابر حد اولیه است.)

$$\begin{aligned} \xrightarrow{(1)} m\left(\frac{-1}{2m}\right)^2 + n &= 0 \Rightarrow n = \frac{-1}{4m} \\ \Rightarrow \frac{a}{n} &= \frac{\frac{-1}{2m}}{\frac{-1}{4m}} = 2 \end{aligned}$$

۱۳۷ گزینه ۴

$$p = 0.4 \times 0.25 + 0.35 \times 0.3 + 0.25 \times 0.35 = 29.25$$

۱۳۸ گزینه ۱ فرض کنید پیشامدهای اصابت تیرهای علی و حسن به هدف را به ترتیب با  $A$  و  $B$  نمایش دهیم. با توجه به مستقل بودن این دو پیشامد داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.6 + 0.4 - 0.6 \times 0.4 = 0.76$$

طبق رابطه احتمال شرطی داریم:

$$P(A|A \cup B) = \frac{P[A \cap (A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.6}{0.76} = \frac{15}{19}$$

۱۳۹ گزینه ۲ پیشامد قبولی نیلوفر را  $A$  و پیشامد قبولی دوستش را  $B$  در نظر می گیریم:

$$\text{طبق فرض: } P(A) = \frac{2}{3}P(B)$$

$$\text{فقط قبولی دوستش: } P(B - A) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\xrightarrow[B, A \text{ مستقل اند}]{} P(B) - P(A)P(B) = \frac{3}{8} \Rightarrow P(B)(1 - P(A)) = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow P(B)(1 - \frac{2}{3}P(B)) = \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{2}{3}(P(B))^2 - P(B) + \frac{3}{8} = 0$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(\frac{2}{3})(\frac{3}{8})}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[B', A' \text{ مستقل اند}]{} P(A' \cap B') = P(A')P(B') = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

۱۴۰ گزینه ۲ می دانیم مجموع انحراف از میانگین ها همیشه صفر است چون مجموع اعداد داده شده برابر ۱۵- است، پس اگر همه اعداد داده شده را ۳ واحد به راست شیفت بدهیم انحراف از میانگین ها به دست می آید:

$$7, -4, -3, -2, 2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{7^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + (-2)^2 + (2)^2}{5} = \frac{82}{5} = 16.4$$

البته اگر واریانس پنج داده مسئله را هم به دست آورید، برابر با همین عدد می شود؛ چون اگر به هر داده ای  $y$  واحد اضافه کنید واریانس تغییر نمی کند.

۱۴۱ گزینه ۴

$$\text{میانگین: } \bar{X} = \frac{a+b+c+d}{4} = 3 \Rightarrow a+b+c+d = 12$$

$$\text{واریانس: } \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2 \Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} - 9 = 1.5 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 = 42$$

$$\text{میانگین جدید: } \bar{X} = \frac{a+b+c+d+5}{5} = \frac{17}{5}$$

$$\text{واریانس جدید: } \sigma^2 = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+25}{5} - \left(\frac{17}{5}\right)^2 = \frac{67}{5} - \frac{289}{25}$$

$$\text{واریانس جدید: } \sigma^2 = \frac{46}{25} = 1.84$$

گزینه ۲

۱۴۲

$$\bar{x} = \frac{5(10) + 4(11) + 7(14)}{16} = \frac{192}{16} = 12$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2) = \frac{1}{16}(5(10 - 12)^2 + 4(11 - 12)^2 + 7(14 - 12)^2)$$

$$= \frac{1}{16}(20 + 4 + 28) = \frac{52}{16} = \frac{13}{4} \rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{13}}{2} \sim 1.8$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1.8}{12} = 0.15$$

۱۴۳ گزینه ۲

$$\bar{x} = \frac{2(10) + 3(8) + 7 + 5}{7} = \frac{56}{7} = 8$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2) = \frac{1}{7}(2(10 - 8)^2 + 3(8 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (5 - 8)^2)$$

$$= \frac{1}{7}(8 + 0 + 1 + 9) = \frac{18}{7} \rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{18}{7}} = 3\sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{3\sqrt{\frac{2}{7}}}{8} = \frac{3(0.534)}{8} \simeq 0.2$$

۱۴۴ گزینه ۴ در دسته‌های سه‌تایی از اعداد زوج متوالی، انحراف معیار مقداری ثابت بوده و برابر زیر است:

$$\sigma^2 = \frac{2^2 + 0^2 + 2^2}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow \text{انحراف معیار: } \sigma = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

در نتیجه ضریب تغییرات ( $C \cdot V$ ) موقعی کوچک‌ترین مقداری می‌شود که میانگین ( $\bar{x}$ ) تا حد امکان زیاد شود، که با توجه به فرض باید اعداد دورقمی ۹۴، ۹۶ و ۹۸ را انتخاب کنیم:

$$\bar{x} = \frac{94 + 96 + 98}{3} = 96 \Rightarrow \min(C \cdot V) = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{96} = \frac{\sqrt{2}}{48\sqrt{3}} = \frac{1}{24\sqrt{6}}$$

۱۴۵ گزینه ۴ ابتدا داده‌ها را ۱۰۰ برابر کرده سپس از هریک ۱۰۰ واحد کم می‌کنیم.

۰، ۸، ۲۰، ۱۶، ۱۶

$$\bar{X} = \frac{60}{5} = 12 \quad \sigma^2 = \frac{144 + 16 + 64 + 16 + 16}{5} = \frac{256}{5}$$

$$\sigma = \frac{16}{\sqrt{5}} \Rightarrow \bar{X} = 12, \quad \sigma = \frac{1}{100} \frac{16}{\sqrt{5}}$$

$$cv = \frac{\frac{16}{100\sqrt{5}}}{12} = \frac{\frac{16}{112}}{\frac{1}{100}} = \frac{1}{7\sqrt{5}}$$

۱۴۶ گزینه ۴ نکته: در صورتی که تمامی داده‌ها را بر عددی ثابت تقسیم کنیم، ضریب تغییرات داده‌ها تغییر نمی‌کند. به کمک این نکته، تمامی داده‌ها را بر ۷۳ تقسیم کرده و محاسبات را تسهیل می‌کنیم. داده‌ها پس از تقسیم عبارت‌اند از:

$$1, 8, 2, 2, 4, 1 \Rightarrow \bar{x} = \frac{18}{6} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{2(4) + 25 + 2(1) + 1}{6} = \frac{36}{6} = 6 \Rightarrow \sigma = \sqrt{6}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow CV = \sqrt{\frac{2}{3}}$$